METODA PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

Julan HERNADI[1]

[1]Program Studi Pend Matematika FKIP UM Ponorogo

October 29, 2011

Jenis Pernyataan dalam Matematika

- **Definisi** (Definition)
  Kesepakatan mengenai pegertian suatu istilah.
- **Teorema** (Theorem)
  Pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya. Teorema dapat berupa kalimat berkuantor, pernyataan bersyarat dengan satu atau beberapa premis dan satu konklusi.
- **Proposisi** (Proposition)
  Merupakan teorema "kecil" dimana tingkat signifikansinya lebih rendah dari Teorema.
- **Fakta** (Facts)
  Kadang digunakan untuk menyatakan Teorema atau Proposisi.
- **Bukti** (Proof)
  Penalaran (argument) valid yang digunakan untuk menunjukkan kebenaran suatu Teorema.

Lanjutan ...

- Aksioma/Postulat (Axiom/Postulate)
  Pernyataan yang diasumsikan benar dan digunakan untuk membuktikan Teorema, mis aksioma bilangan real, aksioma kesejajaran.
- Lemma
  Teorema "kecil" yang biasanya digunakan untuk membuktikan Teorema.
- Akibat (Corollary)
  Teorema yang kebenaran dapat dibuktikan langsung dari Teorema yang sudah dibuktikan.
- Dugaan/Konjekture (Conjecture)
  Pernyataan yang diduga merupakan kebenaran berdasarkan data pendukung (evidence), argumen heuristik, atau intuisi para ahli; tetapi belum berdasarkan argumen valid. Bila konjektur dapat dibuktikan secara formal maka ia berubah menjadi Teorema.

Aksioma bilangan real: Pada bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan dua operasi binair $(+, \cdot)$ dan berlaku sifat-sifat

- $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ (komutatif).
- Ada $0 \in \mathbb{R}$ dan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $a + 0 = 0 + a = a$ (elemen nol), dan $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (elemen satuan)
- dst

Teorema Phytagoras : Pada suatu segitiga siku-siku berlaku "kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-siku"

Definisi bilangan prima : Bilangan prima adalah bilangan lebih besar dari 1 yang tidak mempunyai faktor selain dari 1 dan dirinya sendiri.

Apa dan mengapa membuktikan ?

Pernyataan yang :

- Tidak perlu dibuktikan: Definisi, Aksioma
- Harus dapat dibuktikan: Teorema, Proposisi, Lemma, Akibat.
- Perlu dibuktikan: Konjektur.

Motivasi dalam membuktikan (see: www2.edc.org /makingmath) :

- to establish a fact with certainty,
- to gain understanding,
- to communicate an idea to others,
- for the challenge,
- to create something beautiful,
- to construct a large mathematical theory.

Perhatikan tabel kebenaran implikasi berikut

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Table: Tabel Implikasi

Membuktikan kebenaran pernyataan $p \to q$:

- Bukti Langsung adalah metoda membuktikan pernyataan yang berbentuk $p \to q$ dimana diasumsikan p TRUE. Contoh: Jika x ganjil maka x^2 ganjil.
- Bukti taklangsung merupakan metoda untuk membuktikan pernyataan yang berbentuk $p \to q$ melalui kontraposisinya $\neg q \to \neg p$. Contoh: membuktikan pernytaan Jika x ganjil maka x^2 ganjil melalui Jika x^2 genap maka x genap

Lanjutan ....

- Bukti kosong adalah metoda untuk membuktikan pernyataan yang berbentuk $p \to q$ dengan menunjukkan p FALSE. Contoh: Jika $\emptyset$ himpunan kosong maka $\emptyset$ himpunan bagian dari setiap himpunan.
- Bukti trivial adalah metoda untuk membuktikan pernyataan yang berbentuk $p \to q$ dengan menunjukkan q TRUE. Contoh: jika $-1 < x < 1$ maka $\frac{x^2}{|x|+1} > 0$.

Bukti kontradiksi adalah metoda untuk membuktikan pernyataan yang memiliki konklusi q dengan cara mengasumsikan $\neg q$, kemudian menemukan kontradiksi.

Buktikan himpunan A yang didefinisikan sebagai interval setengah terbuka $A := [0,1)$ tidak memiliki anggota terbesar.

Proof.

Konklusi q : A tidak memiliki anggota terbesar diasumsikan tidak benar, yaitu andai A mempunyai anggota terbesar. ..... □

Buktikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

Proof.

Andai $\sqrt{2}$ bilangan rasional..... □

Bila suatu pernyataan mempunyai premis p dan konklusi q maka dimulai dengan asumsi p TRUE dan diandaikan $\neg q$, kemudian ditemukan kontradiksinya.

BUKTI EKSISTENSIAL DAN KETUNGGALAN

Mencari sesuatu yang eksistensinya (keujudannya) belum terjamin itu namanya spekulatif, tidak rasional. Sesuatu yang ada belum tentu nyata dan dapat digapai. Ketunggalan objek matematika yang sedang dicari banyak dipersyaratkan dalam matematika, tetapi tidak harus misalnya penyelesaian suatu model matematika. Bila ada lebih dari satu penyelesaian maka biasanya diambil yang "terbaik".

- Eksistensial dengan konstruksi $\rightarrow$ ujudnya dapat diperoleh
- Eksistensial tanpa konstruksi $\rightarrow$ ujudnya tidak dapat dilihat, tapi keberadaannya dapat diyakini secara ilmiah.

Eksistensial non-konstruktif

Buktikan terdapat bilangan irrasional x dan y sehingga x^y rasional.

Proof.

Sudah diketahui $\sqrt{2}$ irrasional, anggaplah sudah terbukti.

Perhatikan $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$.

- Bila ternyata $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ rasional maka bukti selesai, dalam hal ini diambil $x = y = \sqrt{2}$.
- Bila $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ irrasional, diperhatikan bahwa

  $$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ adalah rasional.}$$

Jadi salah satu pasangan (x, y), dengan $x = y = \sqrt{2}$, atau $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ dan $y = \sqrt{2}$ pasti memenuhi pernyataan yang dimaksud.

□

Eksitensi-konstruksif

Buktikan, bila $a < b$ maka ada bil rasional r dengan $a < r < b$.

Proof.

- Diperhatikan bahwa $\frac{1}{b-a} > 0$.
- Ambil bil asli n sehingga $n > \frac{1}{b-a}$. Untuk n ini berlaku

$$nb - na > 1 \; .....(*)$$

- Ambil m bilangan bulat pertama yang lebih besar dari na, sehingga berlaku

$$m - 1 < na < m \; .....(**)$$

- Dari (*) dan (**) diperoleh

$$na < m \leq na + 1 < nb.$$

Bentuk ini dapat ditulis $na < m < nb$, bagi kedua ruas dengan n, didapat

$$a < \frac{m}{n} < b$$

dan dengan mengambil $r := \frac{m}{n}$ maka bukti Teorema selesai.

Bukti ketunggalan

Untuk membuktikan ketunggalan elemen x dapat dilakukan dengan 2 cara sebagai berikut

- Ambil sebarang y dalam ruang pembicaraan, tunjukkan $x \neq y$.
- Andaikan ada elemen lain y dengan $x = y$, ditunjukkan adanya suatu kontradiksi.

Bukti dengan contoh pengingkar

Biasanya digunakan untuk menyelidiki kebenaran suatu konjektur. Prosesnya dilakukan dengan coba-coba. Bila ditemukan satu saja kasus yang membuat suatu pernyataan tidak berlaku maka konjektur tersebut tidak benar.

Diberikan pernyataan berupa konjektur berikut : "Untuk setiap n bilangan asli maka $2^{2^n}+1$ merupakan bilangan prima".

untuk $n=1 \to 2^{2^1}+1=5$, untuk $n=2 \to 2^4+1=17$, untuk $n=3 \to 2^9+1=257$, untuk $n=4 \to 2^{16}+1=65537$. Kesemua hasilnya berupa bilangan prima. Sekarang untuk $n=5$ diperoleh

$$2^{32}+1=4294967297=(641)(6700417),$$

ternyata bukan bilangan prima. Jadi $n=5$ merupakan contoh pengingkar (counter example) pernyataan ini. Disimpulkan pernyataan ini tidak benar.